

Ковтаниук Л. В., Панченко Г. Л., Попова Е. О.
L. V. Kovtanyuk, G. L. Panchenko, E. O. Popova

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ И РАЗОГРЕВ ЗА СЧЁТ ПРИПОВЕРХНОСТНОГО ТРЕНИЯ
МАТЕРИАЛА ПРОБКИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ ПРИ ЕЁ ДВИЖЕНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ**

**DEFORMATION AND HEATING DUE TO SURFACE FRICTION OF THE PLUG MATERIAL
IN A ROUND PIPE AS IT MOVES UNDER THE ACTION OF A CHANGING PRESSURE
DIFFERENCE**

Ковтаниук Лариса Валентиновна – член-корреспондент Российской академии наук, профессор Российской академии наук, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН (Россия, Владивосток); 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 5. E-mail: lk@iacp.dvo.ru.

Larisa V. Kovtanyuk – Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, Professor of Russian Academy of Sciences, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS (Russia, Vladivostok); 5 Radio str., Vladivostok, 690041. E-mail: lk@iacp.dvo.ru.

Панченко Галина Леонидовна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН (Россия, Владивосток); 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 5. E-mail: panchenko@iacp.dvo.ru.

Galina L. Panchenko – PhD in Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS (Russia, Vladivostok); 5 Radio str., Vladivostok, 690041. E-mail: panchenko@iacp.dvo.ru.

Попова Елена Олеговна – аспирант Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН (Россия, Владивосток); 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 5. E-mail: polenao@bk.ru.

Elena O. Popova – Postgraduate, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS (Russia, Vladivostok); 5 Radio str., Vladivostok, 690041. E-mail: polenao@bk.ru.

Аннотация. С использованием математической модели больших деформаций материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами исследован разогрев материала при его движении в цилиндрической трубе под действием переменного перепада давления. Изменение температуры в материале связано и с его необратимым деформированием, и с трением о граничную шероховатую поверхность трубы. Перепад давления задаётся на граничных поперечных поверхностях материала и сначала возрастает с течением времени, затем становится постоянным. Накапливаемые необратимые деформации могут быть и деформациями ползучести, и пластическими деформациями. Параметры ползучести, предел текучести и вязкость материала зависят от температуры.

Summary. Using a mathematical model of large strains of materials with elastic, plastic and viscous properties, the heating of a material during its movement in a cylindrical pipe under the action of a variable pressure difference is investigated. The change in temperature in the material is associated with both its irreversible deformation and friction against the boundary rough surface of the pipe. The pressure difference is specified on the boundary transverse surfaces of the material and first increases with time, then becomes constant. Accumulated irreversible strains can be both creep strains and plastic strains. Creep parameters, yield strength and viscosity of the material depend on temperature.

Ключевые слова: ползучесть, вязкопластическое течение, большие деформации, деформационное теплопроизводство, теплопроводность, связанное термомодеформирование.

Key words: creep, viscoplastic flow, large strains, deformation heat production, thermal conductivity, coupled thermal deformation.

Работа выполнена в рамках государственных заданий ИАПУ ДВО РАН (темы № FFWF-2021-0005, FFWF-2022-0002).

Введение. Термомеханическая обработка металлов и сплавов играет важную роль в различных отраслях промышленности благодаря своей способности улучшать свойства материалов и обеспечивать создание высококачественной продукции. Методы термомеханической обработки, к которым относятся нагрев, охлаждение и механическая деформация, являются важными инструментами в производстве металлических изделий с определёнными характеристиками и качествами. Термомеханическая обработка способствует повышению прочности, устойчивости к износу, ударной вязкости и других механических параметров металлов, что делает их более долговечными и даёт возможность использовать в условиях повышенной нагрузки или трения. Актуальными задачами современной промышленности являются задачи определения напряжённо-деформированного состояния элементов конструкций в условиях термомеханических воздействий, когда анализ поведения деформируемых материалов требует одновременного учёта их упругих, пластических и вязких свойств. Учёт связанности полей деформаций и температуры значительно усложняет используемые модельные соотношения. В областях течения необратимые деформации необходимо большие, поэтому задачи о неизотермических течениях требуют рассмотрения в рамках модели больших упругопластических деформаций. Здесь остановимся на модели, в которой, согласно формализму неравновесной термодинамики, обратимые и необратимые деформации задаются дифференциальными уравнениями их изменения (переноса) [1].

Связанные задачи о прямолинейных течениях упруговязкопластических материалов ранее рассматривались в [2–4]. Здесь рассмотрим случай, когда необратимые деформации, накапливаемые материалом, могут быть деформациями и ползучести, и пластичности [5–7].

Следуя аналогичному подходу, приведём решение неизотермической краевой задачи о необратимом деформировании материала, образующего пробку конечной длины в круглой недеформируемой трубе. Задача, когда несжимаемый упруговязкопластический материал находится в условиях жёсткого сцепления со стенками трубы (тепло создаётся внутри только за счёт необратимого деформирования) и подвергается действию изменяющегося со временем перепада давления, заданного на торцевых поверхностях пробки, рассмотрена в [8]. Здесь, в отличие от [8], будем полагать, что разогрев материала происходит и за счёт трения материала о жёсткую граничную поверхность, и создаётся внутри за счёт необратимого деформирования.

Основные модельные соотношения. Согласно теории больших упругопластических деформаций [1], тензоры обратимых \mathbf{m} и необратимых \mathbf{p} деформаций задаются дифференциальными уравнениями изменения (переноса) в форме

$$\frac{D\mathbf{m}}{Dt} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{2}((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{z})), \quad \frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}, \quad (1)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{e} + \alpha T_0 \boldsymbol{\theta} \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \bar{\mathbf{v}} + \nabla^T \bar{\mathbf{v}}), \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \bar{\mathbf{v}} - \nabla^T \bar{\mathbf{v}}), \quad \boldsymbol{\theta} = (T - T_0) T_0^{-1},$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}$ – скорости (источники) изменения необратимых и обратимых деформаций; $\mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m})$ – нелинейная часть тензора вращений $\boldsymbol{\varphi}$ ($\boldsymbol{\varphi} = -\boldsymbol{\varphi}^T$); $\bar{\mathbf{v}}$ – вектор скорости; T , T_0 – соответственно текущая температура и температура среды в недеформированном состоянии (комнатная температура); \mathbf{e} – тензор, задающий упругие деформации; α – коэффициент линейного расширения; \mathbf{I} – единичный тензор, составленный из символов Кронекера. Вторая зависимость (1) определяет объективную производную по времени, задающую взаимовлияние обратимых и необратимых деформаций в процессе деформирования, что обеспечивает геометрическую корректность кинематики среды.

Согласно зависимостям (1), тензор полных деформаций Альманси \mathbf{d} через обратимую и необратимую составляющие записывается в форме

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{u} + \nabla^T\vec{u} - \nabla^T\vec{u} \cdot \nabla\vec{u}) = \mathbf{m} + \mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{m}, \quad (2)$$

где \vec{u} – вектор перемещений. Считаем, что деформируемый материал является механически несжимаемым и изменение его объёма может происходить только за счёт теплового расширения. Согласно уравнению неразрывности, такое условие записывается в виде

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - 2I_1 + 2I_1^2 - 2I_2 - \frac{4}{3}I_1^3 + 4I_1I_2 - \frac{8}{3}I_3\right)^{\frac{1}{2}} = (1 + 3\alpha T_0\theta)^{-1}, \quad (3)$$

$$I_1 = d_{ii}, \quad I_2 = d_{ik}d_{ki}, \quad I_3 = d_{ik}d_{kj}d_{ji}.$$

Для упрощения математической модели принимается гипотеза о независимости термодинамического потенциала (свободной энергии) $\Psi(\mathbf{m}, \theta)$ от необратимых деформаций \mathbf{p} . Из закона сохранения энергии следуют [1] равенства

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + (1 + 3\alpha T_0\theta)^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}); \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\text{div}\vec{J} - T^{-2}\vec{q} \cdot \nabla T + T^{-1}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad (5)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений; P – неизвестная функция добавочного гидростатического давления; ρ – плотность среды; s – плотность энтропии; $\vec{J} = \rho\vec{v}s + \vec{q}$ – поток энтропии; \vec{q} – поток тепла; $W = \rho_0\Psi(\mathbf{m}, \theta)$ – упругий потенциал, здесь ρ_0 – плотность материала в его свободном состоянии. Предположение об изотропии деформируемого материала позволяет принять упругий потенциал в виде разложения в ряд Тейлора относительно свободного состояния [9]:

$$W = W(J_1, J_2, \theta) = -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1J_2 - \chi J_1^3 + v_1J_1\theta + v_2\theta^2 - \\ - v_3J_1\theta^2 - v_4J_1^2\theta - v_5J_2\theta - v_6\theta^3 + \dots \quad (6)$$

$$J_1 = \text{tr}\mathbf{c}, \quad J_2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{m} - 0.5\mathbf{m} \cdot \mathbf{m},$$

где μ – модуль сдвига; b , χ , v_m ($m = 1, 2, \dots, 6$) – иные термомеханические постоянные. Если принять закон теплопроводности в простейшей форме Фурье, то из (5) и (6) следует уравнение теплопроводности:

$$(1 + \beta_1\theta + \beta_2 \text{tr}\mathbf{c}) \frac{\partial\theta}{\partial t} + \beta_3(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{c} = g\Delta\theta - \frac{1}{2v_2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad (7)$$

$$\beta_1 = \frac{v_2(1 - 3\alpha T_0) - 3v_6}{v_2}, \quad \beta_2 = -\frac{v_3}{v_2}, \quad \beta_3 = -\frac{v_1 + v_5}{v_2},$$

где g – коэффициент температуропроводности.

Диссипативный механизм деформирования связан с реологическими и пластическими свойствами материала. Считаем, что необратимые деформации накапливаются в материале с начала процесса деформирования и могут быть как деформациями ползучести, так и пластичности. В областях, где напряжённое состояние ещё не достигло поверхности текучести или где пластическое течение было, но прекратилось, накопление необратимых деформаций происходит в процессе его ползучести. Соответствующий диссипативный механизм деформирования зададим в форме степенного закона ползучести Нортона [10]. В этом законе тензор скоростей необратимых деформаций $\boldsymbol{\gamma}$ полагается равным тензору скоростей деформаций ползучести $\boldsymbol{\varepsilon}^v$:

$$V(\boldsymbol{\sigma}) = B\Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \max|\sigma_i - \sigma_j|, \quad \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (8)$$

$$B = \frac{c_1}{\sigma_0^{n-1}} \exp\left(-\frac{Q}{R_u T_0(1+\theta)}\right), \quad n = b_1 + \frac{b_2}{T_0(1+\theta)},$$

где $V(\boldsymbol{\sigma})$ – термодинамический потенциал; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные значения тензора напряжений; B, n – параметры ползучести материала; c_1, σ_0, b_1 и b_2 – постоянные материала; Q – энергия активации; R_u – универсальная газовая постоянная [11].

При увеличении нагружающих усилий в некоторый момент времени напряжённое состояние достигает поверхности текучести и в материале начинается пластическое течение. Это приводит к смене диссипативного механизма деформирования. В увеличивающейся области пластического течения полагаем, что $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^p$, где $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ – тензор скоростей пластических деформаций. Считаем, что накопленные к моменту начала пластического течения необратимые деформации ползучести (8) являются начальными значениями для накапливающихся далее в области течения пластических деформаций. В случае учёта вязких свойств среды при пластическом течении также требуется совпадение скоростей необратимых деформаций при изменении механизма деформирования с вязкого на пластический.

Следствием принципа максимума Мизеса является ассоциированный закон пластического течения [12]:

$$\boldsymbol{\alpha} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = k, \quad \lambda > 0, \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^{v_0}, \quad (9)$$

где k – предел текучести; $\boldsymbol{\varepsilon}^{v_0}$ – тензор скоростей деформаций ползучести в момент начала пластического течения.

В качестве пластического потенциала примем [12] обобщённое условие пластического течения Треска – Сен-Венана:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \max|\sigma_i - \sigma_j| - \eta \max|\alpha_k|, \quad (10)$$

$$k = k_0 \left(1 - \frac{\theta}{\theta_m}\right)^2, \quad \eta = \eta_0 \text{Exp}(-\nu T_0 \theta), \quad \theta_m = (T_m - T_0)T_0^{-1},$$

где η – коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению; α_k – главные значения тензора $\boldsymbol{\alpha}$; k_0, η_0 – соответственно предел текучести и вязкость материала при комнатной температуре; T_m – температура плавления деформируемого материала; ν – экспоненциальная скорость [13].

Постановка задачи и деформирование до вязкопластического течения. Пусть в недеформируемой цилиндрической трубе радиуса R расположена пробка конечной длины l . Верхняя поперечная граничная поверхность пробки нагружается переменным давлением. Для решения задачи используется цилиндрическая система координат r, φ, z ; полагаем $\theta = \theta(r, t)$, $u = u_z(r, t)$, $v = v_z(r, t)$, $P = P(r, z, t)$, где u и v – отличные от нуля компоненты векторов перемещений и скорости.

Перепад давления $p(t)$ на граничных поверхностях пробки $z = u(r, t)$ и $z = l + u(r, t)$ задаётся в виде

$$\sigma_{zz}(0, u(0, t), t) = -p(t), \quad \sigma_{zz}(0, l + u(0, t), t) = 0, \quad (11)$$

где $r = 0$ – координата максимального перемещения граничных точек пробки.

Пока увеличивающееся со временем давление не достигнет определённого значения, материал удерживается в состоянии прилипания ($u|_{r=R} = v|_{r=R} = 0$) к стенке трубы за счёт сухого трения: $|\sigma_{rz}|_{r=R} < s_0$, (s_0 – задаваемая постоянная сухого трения).

Пока напряжённое состояние в материале не достигло поверхности нагружения, пластическое течение отсутствует и необратимые деформации накапливаются в материале в результате медленного процесса ползучести. Необратимое деформирование материала вызывает его разогрев. Для изменяющейся температуры принимаем следующие условия:

$$\theta(r,0) = 0, \quad \partial\theta(r,t)/\partial r|_{r=0} = 0, \quad \theta(R,t) = 0. \quad (12)$$

Из соотношений (2) и (3) следует, что в рассматриваемом случае антиплоского движения тепловое расширение в материале отсутствует, таким образом, зависимости (3), (4) и (7) справедливы при $\alpha = 0$.

В зависимостях (4) для компонент тензора напряжений ограничимся слагаемыми первого порядка малости по компонентам обратимых деформаций m_{rr} и m_{zz} и второго – по компоненте m_{rz} [6–8].

Уравнения равновесия в рассматриваемом случае имеют форму

$$\sigma_{rz,r} + \sigma_{zz,z} + \sigma_{rz}r^{-1} = 0, \quad \sigma_{rr,r} + \sigma_{rz,z} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})r^{-1} = 0. \quad (13)$$

Из второго уравнения (13) с учётом граничных условий (11) получаем

$$\sigma_{rz} = -\frac{pr}{2l}, \quad p = p(t). \quad (14)$$

Потенциал ползучести (8) принимает вид

$$V(\sigma_{ij}) = B \left((\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{rz}\sigma_{zz} \right)^{\frac{n}{2}}. \quad (15)$$

В (15) ограничимся слагаемыми до порядка n по напряжениям, тогда кинематические соотношения с учётом (1), (2), (4) и (14) принимают форму

$$\varepsilon_{rz}^v = -Bn \left(\frac{pr}{l} \right)^{n-1}, \quad \varepsilon_{rr}^v = -\varepsilon_{zz}^v = \frac{\varepsilon_{rz}^v}{2} \frac{m_{rr} - m_{zz}}{m_{rz}}, \quad (16)$$

$$m_{rz} = -\frac{pr}{4l(\mu - l_1\theta)}, \quad p_{rz} = -\int_0^t Bn \left(\frac{pr}{l} \right)^{n-1} dt, \quad u' = 2(m_{rz} + p_{rz}).$$

С учётом (14) и (16) уравнение теплопроводности (7) примет форму

$$\left(1 + \beta_1\theta + \frac{\beta_3 l_1 p^2 r^2}{8l^2(\mu - l_1\theta)^3} \right) \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\beta_3 pr^2}{8l^2(\mu - l_1\theta)^2} \frac{\partial p}{\partial t} = q \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\theta}{\partial r} \right) - \frac{Bn}{2v_2} \left(\frac{pr}{l} \right)^n, \quad l_1 = v_1 + v_5. \quad (17)$$

Уравнение теплопроводности (17) при условиях (12) было решено численно.

Интегрируя последнее уравнение (16) при условии прилипания, найдём перемещения.

Учитывая зависимости (4), граничные условия (11) и интегрируя первое уравнение равновесия (13), получим зависимости для вычисления компонент тензора напряжений по найденным ранее распределениям температуры, перемещений и компонентам обратимых деформаций

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \frac{p}{l}(z-l-u(0,t)) - \int_0^r \frac{2(\mu-l_1\theta)m_{rr} + (3\mu+l_1\theta)m_{rz}^2}{r} dr + 2(\mu-l_1\theta)(m_{zz}-m_{rr}) - \\ &- 2(\mu-l_1\theta)(m_{zz}(0,t)-m_{rr}(0,t)), \quad \sigma_{rr} = \sigma_{zz} + 2(\mu-l_1\theta)(m_{rr}-m_{zz}), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{zz} - 2(\mu-l_1\theta)m_{zz} - (3\mu+l_1\theta)m_{rz}^2.\end{aligned}\quad (18)$$

При дальнейшем увеличении давления в момент времени t_1 , вычисляемый из уравнения $p(t_1) = 2ls_0R^{-1}$, выполнится равенство $|\sigma_{rz}|_{r=R} = s_0$ и пробка начнёт проскальзывать вдоль стенки трубы. Поэтому условие прилипания заменим на условие

$$(\sigma_{rz} + s_0 + \xi v)|_{r=R} = 0, \quad (19)$$

где ξ – постоянная вязкого трения. С момента времени t_1 материал начинает нагреваться ещё и из-за трения о жёсткую стенку трубы. В этом случае заменим первое условие (12) условием непрерывности температуры в момент времени t_1 , а третье условие (12) – следующим граничным условием:

$$\theta(R,t) = \gamma_1 u(R,t), \quad (20)$$

где γ_1 – задаваемая постоянная теплопроизводства за счёт трения. Также полагаем, что температура θ не достигает температуры плавления в процессе деформирования.

Расчёт температуры и параметров напряжённо-деформированного состояния с момента времени t_1 осуществляется по тем же самым формулам, что и в случае прилипания. Единственным отличием является то, что при интегрировании последнего уравнения (16) для перемещения используется следующее из (14) и (19) граничное условие:

$$u(R,t) = \frac{R}{2\xi l} \int_{t_1}^t p dt - \frac{s_0(t-t_1)}{\xi}.$$

Полученное решение неизотермической задачи при возрастающем перепаде давления остаётся справедливым до момента времени t_2 , который находится из уравнения $p(t_2)R = 2lk(t_2)$. При $t = t_2$ на боковой границе пробки $r = R$ впервые выполнится условие пластического течения (10) в виде $|\sigma_{rz}|_{r=R} = k(t_2)$.

Вязкопластическое течение при возрастающем и постоянном перепаде давления. С момента времени t_2 в материале развивается область вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$. Движущаяся граница $r = m(t)$ отделяет область течения от области $0 \leq r \leq m(t)$, в которой материал продолжает деформироваться вязкоупруго. Согласно формулам (4), уравнениям равновесия (13) и условиям непрерывности компонент напряжений на границе $r = m(t)$, зависимость для компоненты σ_{rz} (14) справедлива и в вязкоупругой области $0 \leq r \leq m(t)$, и в области течения $m(t) \leq r \leq R$.

В области $0 \leq r \leq m(t)$ компоненты тензора скоростей деформаций ползучести определяются соотношениями из (16), и выполняется уравнение теплопроводности (17).

Из ассоциированного закона пластического течения (9) следует, что условие пластичности (10) в рассматриваемом случае ($\sigma_{rz} < 0, \varepsilon_{rz}^p < 0$) принимает форму

$$\sigma_{rz} = -k + \eta(\varepsilon_{rz}^p - \varepsilon_{rz}^{v_0}). \quad (21)$$

Из соотношений (21) и (14) вычислим компоненту ε_{rz}^p :

$$\varepsilon_{rz}^p = \frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0}, \quad \varepsilon_{rz}^{v_0} = -Bn \left(\frac{pm}{l} \right)^{n-1}. \quad (22)$$

В формулах (21) и (22) $\varepsilon_{rz}^{v_0}$ – компонента скоростей деформаций ползучести ε_{rz}^v в точке в момент достижения её упругопластической границы.

Уравнение движения границы $r = m(t)$ получим из условия непрерывности на ней скоростей необратимых деформаций (16) и (22):

$$\frac{pm}{2l} = k_0 \left(1 - \frac{\theta(m,t)}{\theta_m} \right)^2. \quad (23)$$

Уравнение теплопроводности (7) в области вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$ с использованием зависимостей (14) и (22) принимает вид

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 l_1 p^2 r^2}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\beta_3 p r^2}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^2} \frac{\partial p}{\partial t} = q \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{pr}{2lv_2} \left(\frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0} \right). \quad (24)$$

Уравнения (17), (22)–(24) образуют систему уравнений относительно неизвестных функций: θ в областях $0 \leq r \leq m(t)$ и $m(t) \leq r \leq R$, $m(t)$ и $\varepsilon_{rz}^{v_0}$. К этой системе добавим второе граничное условие (12), условие (20) и начальные условия $m(t_2) = R$, $\varepsilon_{rz}^{v_0}(R) = -B(t_2)n(t_2)(p(t_2)R/l)^{n(t_2)-1}$. Также примем непрерывность функции θ и её производной $\partial\theta/\partial r$ на границе $r = m(t)$ и непрерывность температуры в момент начала течения t_2 . Для решения этой системы уравнений разработан алгоритм на основе конечно-разностного метода.

Компонента необратимых деформаций p_{rz} в области течения находится интегрированием дифференциального уравнения, следующего из (1) и (22):

$$\frac{\partial p_{rz}}{\partial t} = \frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0}. \quad (25)$$

При решении уравнения (25) используется условие непрерывности компоненты необратимых деформаций p_{rz} в момент времени t_2 . Компоненты обратимых и необратимых деформаций в обеих областях вычисляются из системы уравнений, следующей из (1). По вычисленным значениям температуры и деформаций с учётом условия непрерывности напряжений на границе $r = m(t)$ напряжения в обеих областях находятся из зависимостей (18).

Если с некоторого момента времени $t_3 > t_2$ перепад давления на граничных поверхностях пробки положить постоянным, равным $p(t_3)$, то в материале по-прежнему присутствуют область вязкоупругого деформирования $0 \leq r \leq m(t)$ и развивающаяся область вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$. Все соотношения данного раздела остаются справедливыми и в данном случае, при $\partial p/\partial t = 0$.

Расчёты проводились в безразмерных переменных r/R и $\tau = b_3 t/\mu$ при линейной функции $p(t) = b_3 t$. Значения безразмерных постоянных выбирались следующими: $\beta_1 = 0.098$, $\beta_3 = -4.5$, $k_0 \mu^{-1} = 2.298 \times 10^{-3}$, $\theta_m = 2.074$, $l_1 \mu^{-1} = 0.452$, $lR^{-1} = 5$, $g \mu b_3^{-1} R^{-2} = 2.638 \times 10^4$, $v_2 \mu^{-1} = 0.1$, $b_1 = 2.518$, $b_2 T_0^{-1} = 1.482$, $c_1 \mu b_3^{-1} = 4.887 \times 10^4$, $\sigma_0 \mu^{-1} = 7.199 \times 10^{-6}$, $QR_u^{-1} T_0^{-1} = 52.37$, $b_3 \eta_0 \mu^{-2} = 3.257 \times 10^{-6}$, $b_3 \xi R \mu^{-2} = 2.605 \times 10^{-4}$, $v T_0 = 1.212$.

На рис. 1 представлен график изменения границы области вязкопластического течения в зависимости от времени τ в промежутке от $\tau_2 = 0.0083$ до $\tau_3 = 0.0084$. Распределение температу-

ры θ в момент времени τ_3 по материалу пробки представлено на рис. 2. Рис. 3 и 4 иллюстрируют графики компоненты тензора необратимых деформаций p_{rz} и перемещений в зависимости от радиуса r/R в момент времени τ_3 .

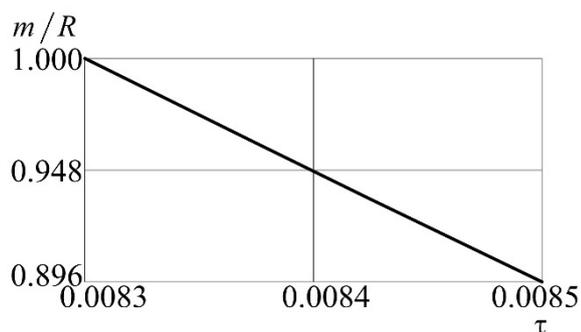


Рис. 1. Упругопластическая граница

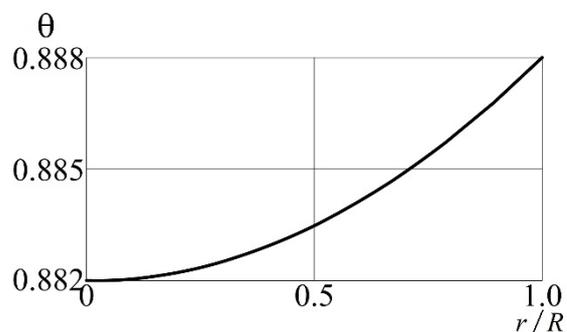


Рис. 2. Распределение температуры

Заключение. В данной статье получено решение связанной краевой задачи теории больших деформаций о неизотермическом деформировании материала, образующего пробку конечной длины в круглой недеформируемой трубе, под действием возрастающего со временем перепада давления. Накопление необратимых деформаций в материале связано с его ползучестью и последующим пластическим течением. Разогрев материала происходит за счёт процессов необратимого деформирования и трения материала о граничную поверхность трубы. Рассмотрены процесс ползучести материала при возрастающем давлении, возникновение и развитие вязкопластического течения при возрастающем и постоянном давлении. Рассчитаны температура и параметры напряжённо-деформированного состояния на каждом этапе нагружения, установлена закономерность продвижения упругопластической границы по деформируемому материалу.



Рис. 3. Компонента p_{rz}

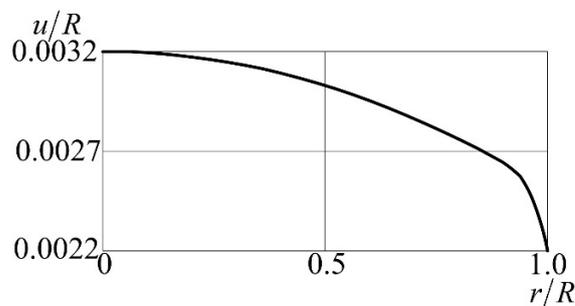


Рис. 4. График перемещений

Учёт трения материала о граничную поверхность трубы приводит к значительному по сравнению с [12] повышению температуры в материале.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буренин, А. А. Большие необратимые деформации и упругое последствие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. – Владивосток: Дальнаука, 2013. – 312 с.
2. Буренин, А. А. Неизотермическое движение упруговязкопластической среды в трубе в условиях изменяющегося перепада давления / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко // Доклады Академии наук. – 2015. – Т. 464. – № 3. – С. 284-287.
3. Буренин, А. А. Развитие и торможение вязкопластического течения в слое при его нагреве за счёт трения о шероховатую плоскость / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т. 56. – № 4 (332). – С. 101-111.

4. Буренин, А. А. Деформирование и разогрев упруговязкопластического цилиндрического слоя при его движении за счёт изменяющегося перепада давления / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко // Известия РАН. Механика твёрдого тела. – 2018. – № 1. – С. 6-18.
5. Бегун, А. С. Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов / А. С. Бегун, А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 470. – № 3. – С. 275-278.
6. Бегун, А. С. Смена механизмов накопления необратимых деформаций материалов на примере их вискозиметрического деформирования / А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк, А. О. Лемза // Известия РАН. Механика твёрдого тела. – 2018. – № 1. – С. 103-112.
7. О согласовании механизмов роста необратимых деформаций полого шара при всестороннем сжатии / А. А. Буренин, К. Н. Галимзянова, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко // Доклады Академии наук. – 2018. – Т. 482. – № 4. – С. 403-406.
8. Ковтанюк, Л. В. О теплотворной способности необратимого деформирования материала пробки в круглой трубе / Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко, Е. О. Попова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2024. – № 1 (59). – С. 88-100.
9. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
10. Norton, F. H. The creep steel of high temperature / F. H. Norton. – Y.: Mc Graw Hill, 1929. – 110 p.
11. Alain I. The correlation between the power-law coefficients in creep: the temperature dependence / I. Alain // Journal of Materials Science. – 1998. – V. 33. – P. 3201-3206.
12. Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528 с.
13. Pla F. Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio / F. Pla, A. M. Mancho, H. Herrero // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2009. – V. 238. – I. 5. – P. 572-580.